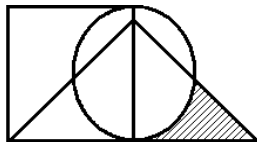


**Московский университет им. С.Ю. Витте**  
**Рейтинговая работа**  
**Дискретная математика**

**Вариант 1**

**1. Выполнение операций над множествами**

**Задание 1.** Построить выражения над множествами  $A$  (круг),  $B$  (квадрат) и  $C$  (треугольник), которым соответствуют заштрихованные области на заданных диаграммах Эйлера-Венна.



**Решение:**

Заштрихованной части треугольника соответствует та часть треугольника, которая не имеет общих элементов ни с кругом ни с квадратом. Таким образом, заштрихованной части соответствует выражение:

$$C - (A \cup B)$$

Ответ:  $C - (A \cup B)$

**Задание 2.** Упростить выражение  $(A \cap B) \cap (\bar{C} \cup (\bar{A} \cup \bar{B})) \cap C$  с применением тождеств алгебры множеств.

**Решение:**

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap (\bar{C} \cup (\bar{A} \cup \bar{B})) \cap C &= (\text{дистрибутивный закон}) = \\ &= (A \cap B) \cap (\bar{C} \cap C \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C) = (\text{дистрибутивный закон}) = \\ &= (A \cap B) \cap (\bar{C} \cap C \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{B} \cap C) = (\text{закон дополнительности}) = \\ &= (A \cap B) \cap (\emptyset \cup \bar{A} \cap C \cup \bar{B} \cap C) = (\text{закон идентичности}) = \\ &= (A \cap B) \cap (\bar{A} \cap C \cup \bar{B} \cap C) = (\text{дистрибутивный закон}) = \\ &= A \cap B \cap \bar{A} \cap C \cup A \cap B \cap \bar{B} \cap C = (\text{закон дополнительности}) = \\ &= \emptyset \cap B \cap C \cup A \cap \emptyset \cap C = (\text{закон идентичности}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset\end{aligned}$$

Ответ:  $(A \cap B) \cap (\bar{C} \cup (\bar{A} \cup \bar{B})) \cap C = \emptyset$

## 2. Выполнение операций алгебры логики

**Задание 1.** Представить в СДНФ функцию  $(\overline{x_1 x_2} \oplus (\overline{x_1 + x_2})x_3) \downarrow x_3$

**Решение:**

Построим таблицу истинности для заданной функции  $f(x_1, x_2, x_3)$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\overline{x_1 x_2}$	$\overline{x_1 + x_2}$	$(\overline{x_1 + x_2})x_3$	$(\overline{x_1 x_2} \oplus (\overline{x_1 + x_2})x_3)$	$f$
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0

1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

Для нахождения СДНФ нужно из таблицы истинности выделить лишь те строки, результат которых равен 1. Для данной функции набор строк будет следующим:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
1	1	0	1

Далее, для каждой строки выписываем конъюнкцию всех переменных по следующему алгоритму: если значение переменной в данной строке равно 1, то в конъюнкцию записываем саму переменную, а если равно 0, то – отрицание этой переменной. После этого все конъюнкции связываем в дизъюнкцию. В результате, совершенная дизъюнктивно-нормальная форма (СДНФ) нашей функции равна:

$$x_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\text{Ответ: } (\bar{x}_1 \bar{x}_2) \oplus (\overline{x_1 + x_2}) x_3 \downarrow x_3 = x_1 x_2 \bar{x}_3$$

**Задание 2.** Пусть даны высказывания  $A =$  "инфляция – высокая" и  $B =$  "снижается эффективность производства". Записать в словесной форме высказывание  $F = A \rightarrow B$ .

**Решение:**

В словесной форме импликация  $A \rightarrow B$  читается «если  $A$ , то  $B$ »

Решение контрольной работы по дискретной математике скачано с  
<https://helpstudent24.ru>

(больше примеров по ссылке)

Решение задач по математике, экономике, программированию

Таким образом, высказывание из условий задачи записывается так:

Если инфляция высокая, то снижается эффективность производства

### 3. Решение задач теории графов.

**Задание 1.** Задана таблица смежности неориентированного графа.

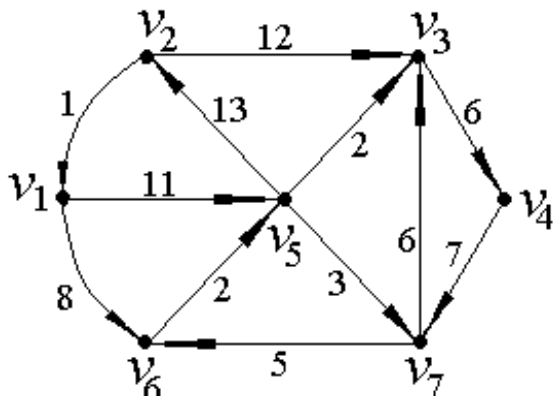
Определить число петель в данном графе.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	1	1	1	1	1	1
$v_2$	1	1	1	1	1	0
$v_3$	1	1	1	1	0	0
$v_4$	1	1	1	0	0	0
$v_5$	1	1	0	0	0	0
$v_6$	1	0	0	0	0	0

**Решение:**

Данная таблица смежности имеет три единицы на главной диагонали, значит, число петель в данном графе равно трем.

**Задание 2.** Построить матрицу инцидентности для графа, изображенного на рисунке.

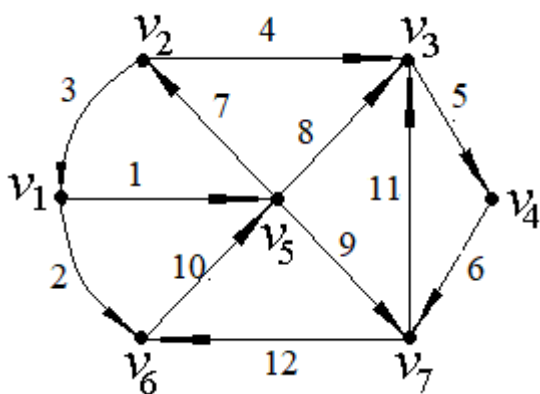


**Решение:**

Матрицей инцидентности орграфа  $D$  называется  $(n \times m)$  матрица  $B(D) = [b_{ij}]$  у которой элементы равны:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги } x_j \\ -1, & \text{если вершина } v_i \text{ является началом дуги } x_j \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги ребру } x_j \end{cases}$$

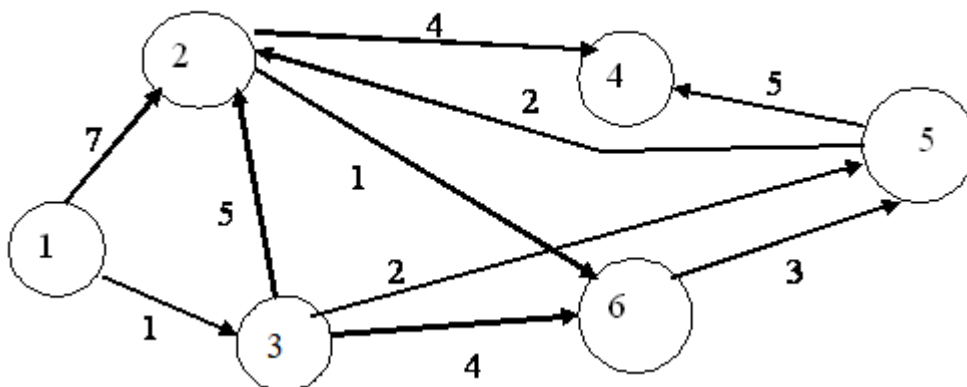
Пронумеруем ребра заданного графа:



$$B(D) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Комбинаторика. Применение графовых моделей.

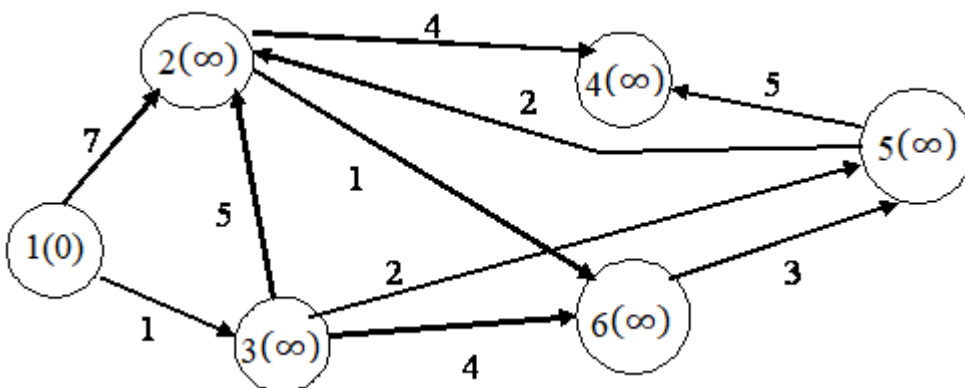
**Задание 1.** Определить кратчайший путь из одной вершины графа в другую, изображенного на рисунке.



**Решение:**

Найдем кратчайшие пути из вершины 1 в остальные вершины графа по алгоритму Дейкстры.

Присваиваем вершине 1 метку 0. Остальным вершинам метку ( $\infty$ ).

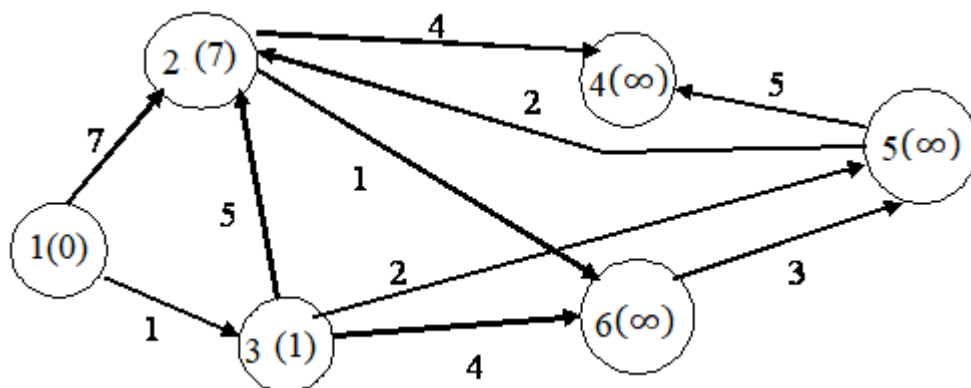


Первый шаг. Минимальную метку имеет вершина 1. Из нее можно попасть в вершины 2 и 3.

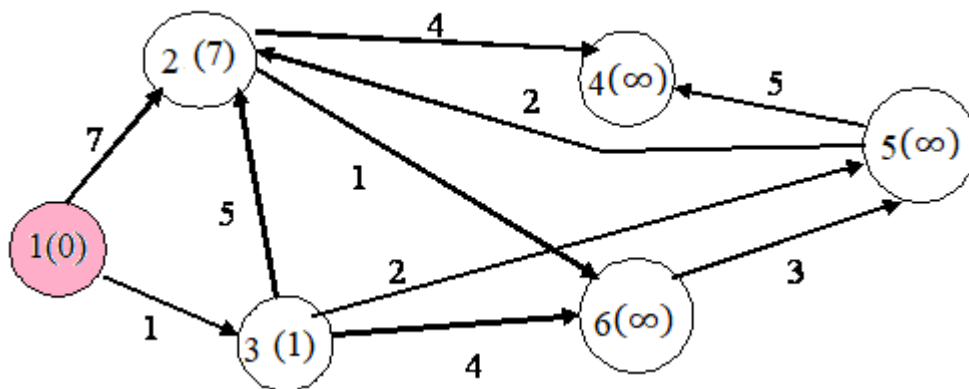
Первый по очереди сосед вершины 1 – вершина 3, потому что длина пути до нее минимальна. Длина пути в нее через вершину 1 равна сумме значения

метки 1 и длины ребра, идущего из 1 в 3, то есть  $0 + 1 = 1$ . Это меньше текущей метки вершины 3, бесконечности, поэтому новая метка вершины 3 равна 1.

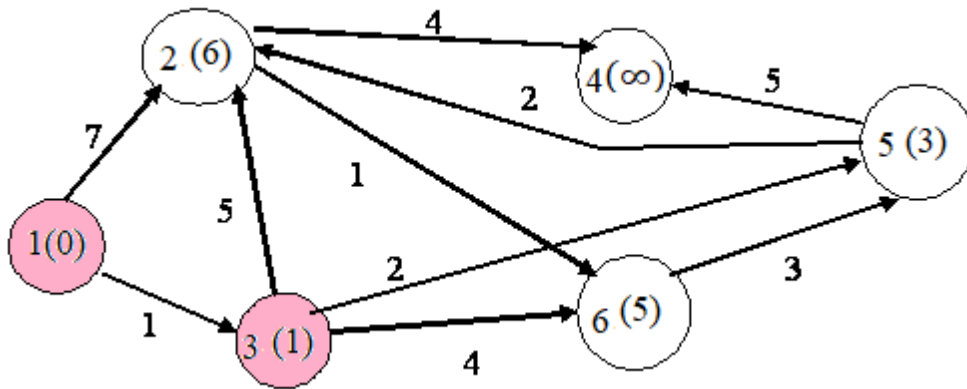
Аналогичную операцию проделываем с вершиной 2.



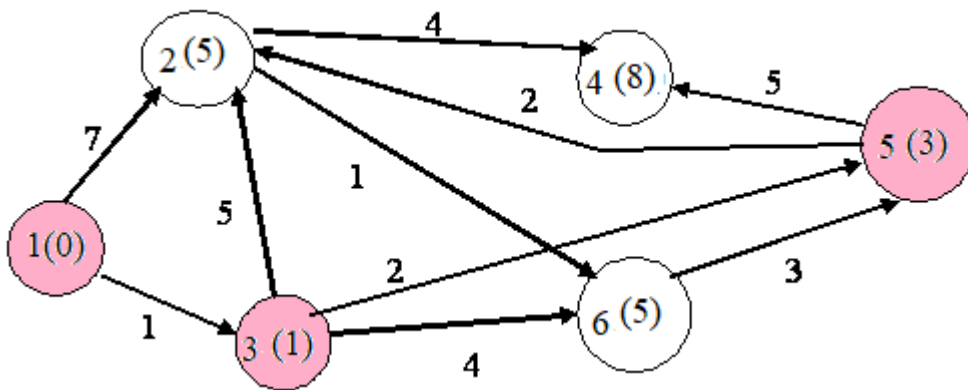
Все вершины, в которые можно попасть из вершины 1, проверены. Отметим, что эта вершина посещена.



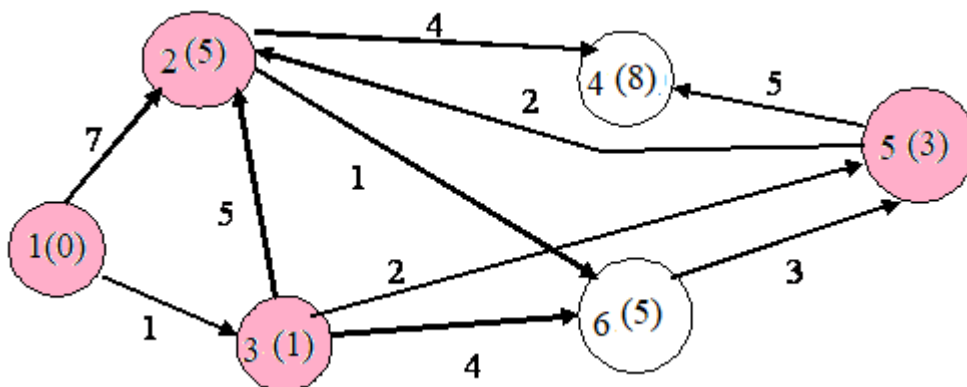
Второй шаг. Шаг алгоритма повторяется. Снова находим непосещенную вершину с минимальной меткой. Это вершина 3. Снова пытаемся уменьшить метки вершин, в которые можно попасть из вершины 3, а затем помечаем вершину 3 посещенной.



Третий шаг. Снова находим непосещенную вершину с минимальной меткой. Это вершина 5. Работаем с ней:

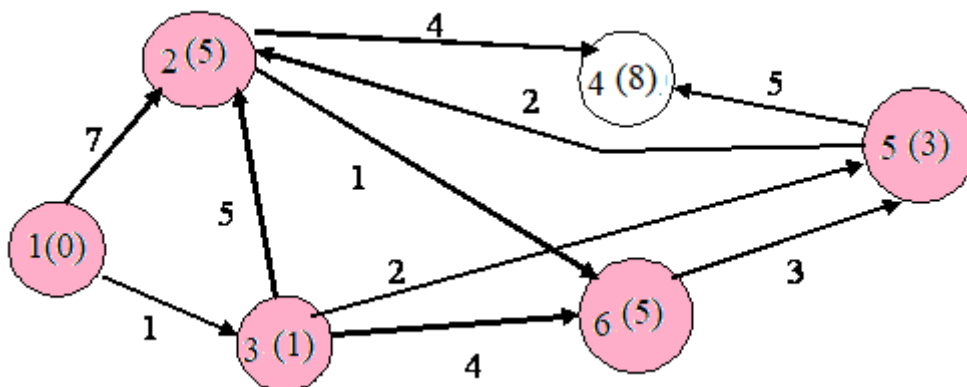


Следующим шагом выбираем вершину 2:



Следующим шагом выбираем вершину 6:





Алгоритм закончен.

Восстанавливая пути, получаем:

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 2: 5(1 → 3 → 5 → 2)

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 3: 1(1 → 3)

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 4: 8(1 → 3 → 5 → 4)

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5: 3(1 → 3 → 5)

Кратчайший путь из вершины 1 в вершину 6: 5(1 → 3 → 6)

**Задание 2.** Найдите разложение полинома  $(2x - y)^4$

**Решение:**

Найдем искомое разложение при помощи треугольника Паскаля. По нему биномиальные коэффициенты для  $n = 4$  равны 1,4,6,4,1. Таким образом, по биномиальной формуле имеем:

$$(2x - y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(-y) + 6(2x)^2(-y)^2 + 4(2x)(-y)^3 + (-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$